

磁気ギヤの入力トルクに対する周波数応答解析

Frequency Response Analysis of Input Torque for Magnetic Gears

岩城圭悟[†]・中村健二

東北大学 大学院工学研究科, 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11 (〒980-8579)

K. Iwaki[†] and K. Nakamura

Tohoku University, Graduate School of Engineering, 6-6-11 Aoba Aramaki Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan

Flux-modulated-type magnetic gears have attractive features, such as torque transmission without mechanical contact and a high torque density. However, most studies focus on steady-state characteristics, while the frequency characteristics of torque transmission remain unclear. This paper discusses a frequency response analysis for magnetic gears. The results reveal that the frequency characteristics exhibit a resonance frequency, and that torque ripple is not transmitted to the output rotor in high-frequency regions. Moreover, this paper presents a formulation of the frequency characteristics of magnetic gears by linearizing the relationship between the load angle and the transmitted torque. The linearized frequency characteristics mostly correspond with the results from nonlinear differential equations.

Key words: Flux-modulated-type magnetic gears, frequency response analysis, frequency characteristics, nonlinear magnetic spring, two-inertia system, torque ripple

1. はじめに

磁気ギヤは永久磁石の吸引・反発力を用いて、非接触で動力を伝達できることから、機械的な接点に起因する摩擦や発熱などの欠点が無く、中でも磁束変調型磁気ギヤはトルク密度が高いことから、新たな動力伝達装置として注目されている¹⁾。磁気ギヤは2つのロータを有し、そのシステムは2慣性系として表現され、両ロータ間に働くトルクは相対的な位置角の変位に対して反対向きとなることから、ばねのような振る舞いをするが、その特性は非線形である²⁾。この2慣性系の動的な特性については、サーボ制御による高速応答に関する検討、ロボット応用、風力発電への応用などについては報告があるが、入力側のロータに大きなリプルを含むトルクが印加されたときに、そのリプルの周波数に対して両ロータがどのような応答を示すのかについては検討事例が無い^{2)~4)}。

また、トルクリプルが大きい代表的なモータとしてスイッチトリラクタンス (SR) モータがあるが、このSRモータを上述のような2慣性系である磁気ギヤの入力側モータとして用いて磁気ギヤと一体化させると、SRモータのトルクリプルが出力側に伝達しないことが示唆されている⁵⁾。しかし、この検討は有限要素法を用いて速度が一定の条件、すなわち慣性モーメントが無限大の仮定の下で行われており、実際の回転運動を模擬していないため、トルクリプルが出力側に伝達しない理由については不明であるため、より実現象に近い、運動方程式に従う条件で応答を求める必要がある。加えて、磁気ギヤの伝達トルクは非線形特性を有することから、その応答を正確に求めるためには、運動方程式を数値的に解く必要がある。さらに、ばねを有する系は、ローパスフィルタとして働くため、上述のようなSRモータのトルクリプルが伝達しない特性がどのような周波数以上で成り立つかを定量的に示すには、定常状態の波形から算定される周波数特性を検討する必要がある。

そこで本稿では、磁気非線形ばねを有する2慣性系である磁気ギヤに、大きなリプルを有するトルクが入力された際の各ロータへの伝達特性について、非線形微分方程式を用いて数値解析を

行い、定常状態の波形に着目し周波数特性を解析するとともに、線形近似による周波数特性の定式化を行い、両特性の比較を行ったので報告する。

2. 有限要素法解析と非線形微分方程式の数値解析の比較

2.1 磁気ギヤの諸元とシステム構成

Fig. 1に、考察に用いる磁束変調型磁気ギヤの諸元を示す⁶⁾。インナーロータおよびアウターロータの極対数 p_{in}, p_{out} はそれぞれ3, 31であり、ギヤ比 G_r は10.33である。

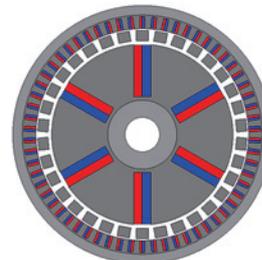
Fig. 2に、考察する2慣性系システムの構成を示す。時間変化する入力トルク $T_{in}(t)$ がインナーロータに入力されており、アウターロータには負荷としてダンパが接続されている。前述のとおり、両ロータ間は磁気非線形ばねで結合されており、このばねによりトルクが伝達される。

周波数応答特性を算定するため、入力トルク $T_{in}(t)$ を以下の式で与えた。

$$T_{in}(t) = T_d + T_a \sin(2\pi ft) \quad (1)$$

ここで、 T_d は入力トルクの平均値であり、本論文では0.5 N·mとした。また、 T_a はリプルの振幅であり、SRモータのような大きなトルクリプルを有する波形を模擬するため、平均値と同じく0.5 N·mとした。Fig. 3に、例として $f=5$ Hzのときの入力トルク波形を示す。この図より、入力トルクのリプルは1.0 N·mであることが了解される。

上述のシステムにおいて、入力トルクの周波数 f を変化させたときの両ロータの応答を解析する。



Outside diameter (mm)	150
Inner air gap length (mm)	2
Outer air gap length (mm)	1
Stack length (mm)	25
Pole pairs of inner rotor p_{in}	3
Pole pairs of outer rotor p_{out}	31
Gear ratio G_r	10.33

Fig. 1 Specifications of flux-modulated-type magnetic gear.

Corresponding author: K. Iwaki (e-mail: keigo.iwaki.pl@dc.tohoku.ac.jp).

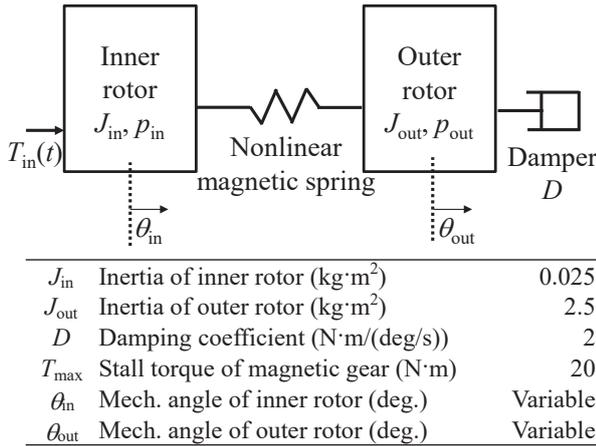


Fig. 2 Configuration of two-inertia system.

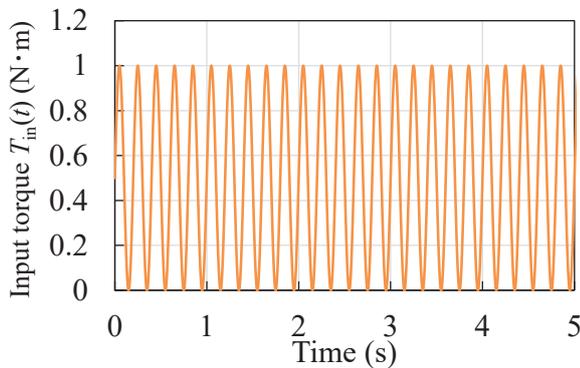


Fig. 3 Waveform of input torque.

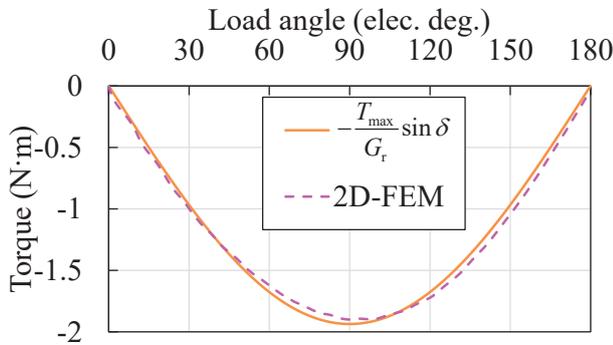


Fig. 4 Comparison of load angle versus torque of inner rotor characteristics.

2.2 負荷角対トルク特性の比較

磁気ギヤにおいて、負荷角 δ は以下の式で表される。

$$\delta = p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out} \quad (2)$$

ここで、 p_{in} および p_{out} はそれぞれインナーロータ、アウターロータの極対数、 θ_{in} および θ_{out} はそれぞれインナーロータ、アウターロータの位置角である。

Fig. 4に、2次元有限要素法(2D-FEM)を用いて算定したインナーロータの負荷角対トルク特性を示す。2D-FEMには株式会社JSOL製の有限要素法解析ソフトJMAG-Designer ver. 23.1を用いた。なお、一般に磁気ギヤでは、3D-FEMや実機に対して、2D-FEMで

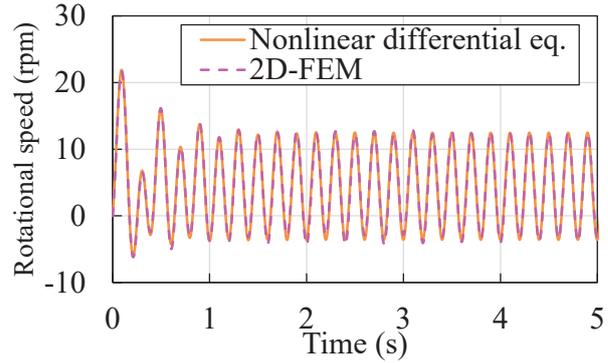


Fig. 5 Comparison of speed waveforms of inner rotor between 2D-FEM and nonlinear differential equation.

は最大トルクが過大評価となる η ことから、最大トルクを3D-FEMの値に近づけるため、積み厚を16mmと補正して解析を行っている。また同図中に、磁気ギヤのアウターロータの最大トルク $T_{max}=20\text{N}\cdot\text{m}$ を用いてインナーロータの負荷角対トルク特性を $T_{load} = -T_{max}/G_r \sin\delta$ で近似した特性を示す。この図を見ると、2D-FEMによる計算結果は正弦波で近似できることが了解される。

2.3 2 慣性系の非線形微分方程式によるモデル化および有限要素法との比較

前節で近似した負荷角対トルク特性を用いて、Fig. 2の系は以下の2つの非線形微分方程式で表現される。

$$\begin{cases} J_{in} \frac{d^2\theta_{in}}{dt^2} = -\frac{T_{max}}{G_r} \sin(p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out}) + T_{in}(t) \\ J_{out} \frac{d^2\theta_{out}}{dt^2} = -T_{max} \sin(p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out}) - D \frac{d\theta_{out}}{dt} \end{cases} \quad (3)$$

ここで、(3)式およびそれぞれインナーロータおよびアウターロータの運動方程式である。また、 J_{in} と J_{out} はそれぞれインナーロータとアウターロータの慣性モーメントである。また、 D はダンパの減衰係数である。

次いで、これらの非線形微分方程式の数値解析と、2D-FEMによる解析の比較を行った。微分方程式の数値解析にはMathWorks社製のMATLAB/Simulink R2024aを用いた。なお、いずれの解析においても、各ロータの初期位置角と初期速度は0とした。

Fig. 5に、 $f=5\text{Hz}$ としたときの、インナーロータの速度波形を示す。この図を見ると、2D-FEMによる計算結果と、(3)式を用いた数値解析の結果はほぼ一致していることがわかり、非線形微分方程式によるモデル化の妥当性が示された。

3. 非線形微分方程式による周波数特性の解析

前章において、非線形微分方程式によるモデリングとその数値解析の妥当性が示されたことから、本章ではこれを用いて周波数特性を計算する。

Fig. 6に、インナーロータに入力するトルクのリブルの周波数 f を種々変えた場合の両ロータのトルク波形を示す。

同図(a)は $f=1\text{Hz}$ の結果である。同図より、アウターロータのトルクリブルがインナーロータより大きいことがわかる。同図(b)は $f=2.3\text{Hz}$ の結果である。同図より、両ロータのリブルが入力トルク

のリップル 1 N・m から増幅されていることがわかる。一方、同図(c)は $f=20$ Hz の結果である。この図より、インナーロータのリップルはおおよそ 1 N・m であるのに対し、アウターロータのリップルはほぼ 0 N・m であることがわかる。すなわち、入力側のリップルが出力側に一切伝達されていないことが了解される。

Fig. 7 に、両ロータのトルクリップルの周波数特性を示す。同図から、低周波領域では、アウターロータの方がインナーロータよりもトルクリップルが大きいことがわかる。また、 $f=2.3$ Hz 付近に共振周波数が存在し、この周波数付近で両ロータのトルクリップルの大小関係が逆転していることがわかる。そして、共振周波数より高周波領域では、インナーロータのトルクリップルは入力トルクのリップルである 1 N・m に、アウターロータのリップルは 0 N・m にそれぞれ漸近していることがわかる。

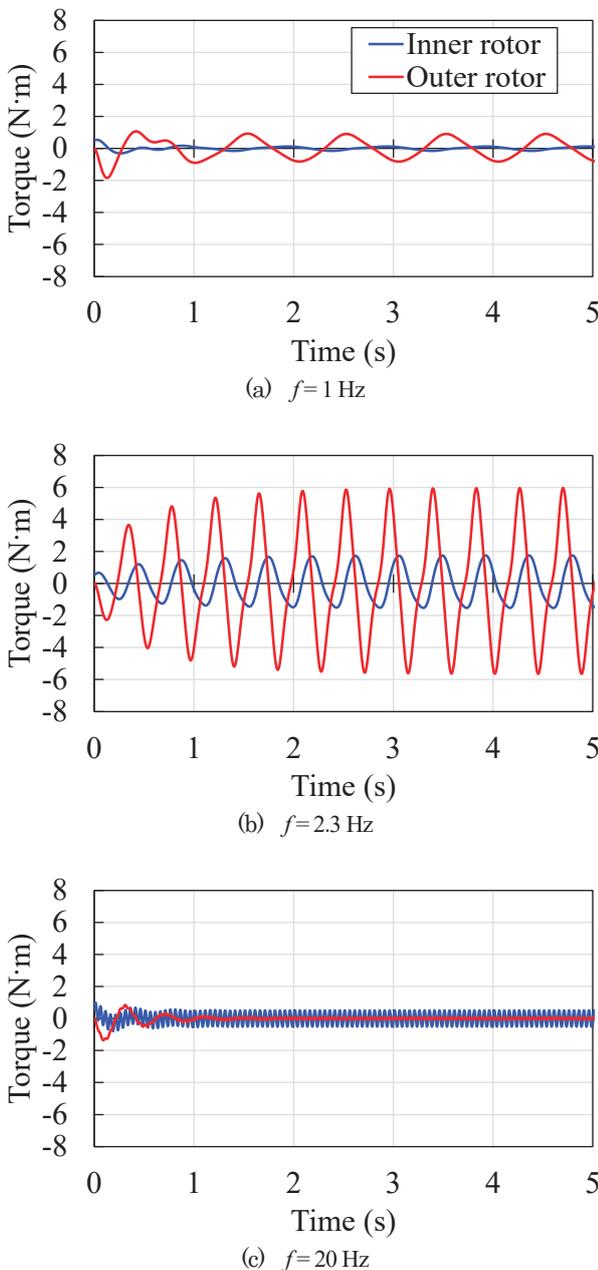


Fig. 6 Torque waveforms at various frequencies.

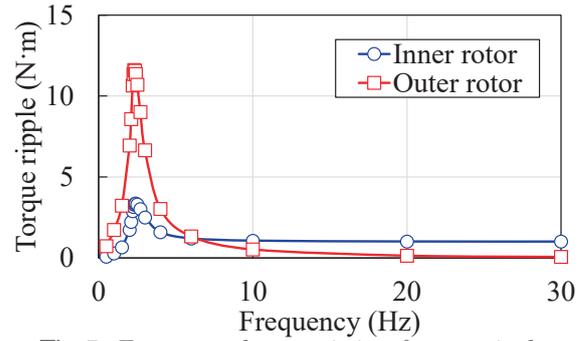


Fig. 7 Frequency characteristics of torque ripple.

4. システムの線形化および周波数特性の定式化

前章で得られた周波数特性は、各ロータの慣性モーメント J_{in} , J_{out} やダンパの減衰係数 D , 磁気ギャの最大トルク T_{max} などのパラメータに依存すると考えられるが、各々のパラメータの寄与について考察するためには、定式化が不可欠である。しかし、(3)式のような非線形微分方程式のままでは、周波数特性を定式化することはできない。そこで、(3)式に関して、磁気的非線形ばねの特性を線形近似することにより、Fig. 7 で得られた周波数特性の定式化を行う。

4.1 磁気的非線形ばねの線形化

非線形ばねの特性を以下の式で近似することを考える。

$$\begin{cases} -\frac{T_{max}}{G_r} \sin(p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out}) \approx K_1\theta_{in} + K_2\theta_{out} \\ -T_{max} \sin(p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out}) \approx K_3\theta_{in} + K_4\theta_{out} \end{cases} \quad (4)$$

入力トルクの平均値は 0.5 N・m であることから、0.5 N・m 近傍で負荷が変動すると仮定すると、ばね定数 $K_1 \sim K_4$ はロータの負荷角対トルク特性の接線を用いて近似できる⁸⁾。すなわち、次式のように求められる。

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\partial}{\partial \theta_{in}} \left\{ -\frac{T_{max}}{G_r} \sin(p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out}) \right\} \Big|_{p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out} = \delta_0} \\ = -p_{in} \frac{T_{max}}{G_r} \cos \delta_0 \\ K_2 = \frac{\partial}{\partial \theta_{out}} \left\{ -\frac{T_{max}}{G_r} \sin(p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out}) \right\} \Big|_{p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out} = \delta_0} \\ = -p_{out} \frac{T_{max}}{G_r} \cos \delta_0 \\ K_3 = \frac{\partial}{\partial \theta_{in}} \left\{ -T_{max} \sin(p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out}) \right\} \Big|_{p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out} = \delta_0} \\ = -p_{in} T_{max} \cos \delta_0 \\ K_4 = \frac{\partial}{\partial \theta_{out}} \left\{ -T_{max} \sin(p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out}) \right\} \Big|_{p_{in}\theta_{in} + p_{out}\theta_{out} = \delta_0} \\ = -p_{out} T_{max} \cos \delta_0 \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 δ_0 は負荷角の平均値であり、以下の式で求まる。

$$\delta_0 = \sin^{-1}(G_r T_d / T_{max}) \quad (6)$$

Fig. 8 に、負荷角対トルク特性を上述のばね定数により近似した特性を示す。-0.5 N・m 近傍での近似ではあるが、負荷角が 0 ~ 30 deg. 程度の間では精度良く近似できていることがわかる。

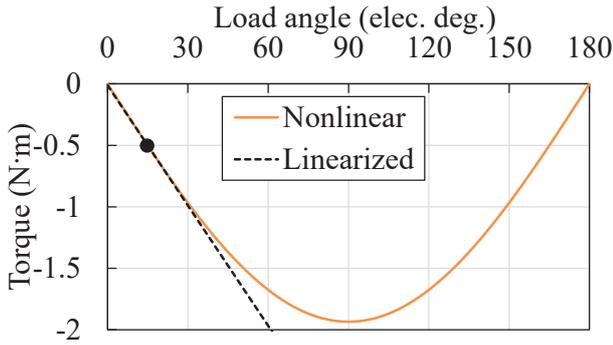


Fig. 8 Linearization of load angle versus torque characteristic.

4.2 周波数特性の定式化

前節で導出したばね定数を用いて、(3)式は次の(7)式のように線形近似できる。

$$\begin{cases} J_{in} \frac{d^2 \theta_{in}}{dt^2} = K_1 \theta_{in} + K_2 \theta_{out} + T_{in}(t) \\ J_{out} \frac{d^2 \theta_{out}}{dt^2} = K_3 \theta_{in} + K_4 \theta_{out} - D \frac{d\theta_{out}}{dt} \end{cases} \quad (7)$$

次いで、両式を微分演算子 s を用いて周波数領域に変換するとそれぞれ以下の(8)式を得る。

$$\begin{cases} s^2 J_{in} \theta_{in}(s) = K_1 \theta_{in}(s) + K_2 \theta_{out}(s) + T_{in}(s) \\ s^2 J_{out} \theta_{out}(s) = K_3 \theta_{in}(s) + K_4 \theta_{out}(s) - s D \theta_{out}(s) \end{cases} \quad (8)$$

(5)式より $K_1 K_4 - K_2 K_3 = 0$ であることに留意して、(8)式から $\theta_{in}(s)$ および $\theta_{out}(s)$ を求めると以下ようになる。

$$\begin{cases} \theta_{in}(s) = \frac{J_{out} s^2 + Ds - K_4}{J_{in} J_{out} s^4 + J_{in} Ds^3 - (K_4 J_{in} + K_1 J_{out}) s^2 - DK_1 s} T_{in}(s) \\ \theta_{out}(s) = \frac{K_3}{J_{in} J_{out} s^4 + J_{in} Ds^3 - (K_4 J_{in} + K_1 J_{out}) s^2 - DK_1 s} T_{in}(s) \end{cases} \quad (9)$$

これらを用いて、 $T_{in}(s)$ から(8)式の左辺である、 $s^2 J_{in} \theta_{in}(s)$ および $s^2 J_{out} \theta_{out}(s)$ までの伝達関数を求めると、次式が得られる。

$$\begin{cases} G_{in}(s) = \frac{s^2 J_{in} \theta_{in}(s)}{T_{in}(s)} \\ = \frac{J_{in} (J_{out} s^2 + Ds - K_4) s^2}{J_{in} J_{out} s^4 + J_{in} Ds^3 - (K_4 J_{in} + K_1 J_{out}) s^2 - DK_1 s} \\ G_{out}(s) = \frac{s^2 J_{out} \theta_{out}(s)}{T_{in}(s)} \\ = \frac{K_3 J_{out} s^2}{J_{in} J_{out} s^4 + J_{in} Ds^3 - (K_4 J_{in} + K_1 J_{out}) s^2 - DK_1 s} \end{cases} \quad (10)$$

4.3 非線形微分方程式から得た周波数特性と線形化後の周波数特性の比較

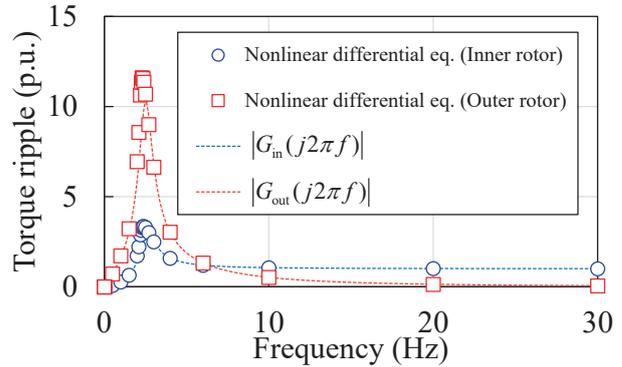
前節で導出した伝達関数の妥当性を検討するため、(10)式から得られる周波数特性を、非線形微分方程式である(3)式の数値解析により得られた結果、すなわち Fig. 7 と比較する。

Fig. 9(a)に両者の比較を示す。なお、 $|G_{in}(j2\pi f)|$ および $|G_{out}(j2\pi f)|$ は(10)式の周波数伝達関数である。また、同図中の Fig. 7 の結果は入力トルクのリップルの値 $1 \text{ N}\cdot\text{m}$ で規格化している。この図を見ると、線形化後の周波数特性 $|G_{in}(j2\pi f)|$ 、 $|G_{out}(j2\pi f)|$ は、非線形微分方程式を数値解析で解いた Fig. 7 の結果と、共振周波数付近を除

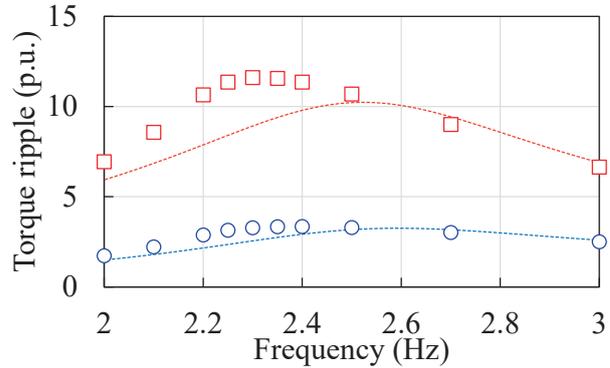
いておおむね一致していることがわかる。

同図(b)に、同図(a)の共振周波数付近の拡大図を示す。共振周波数付近では誤差が生じており、具体的には非線形微分方程式の数値解析の結果では共振周波数が 2.3 Hz であるのに対して、線形化した伝達関数では 2.5 Hz である。また、共振周波数でのピーク値は非線形微分方程式の数値解析の結果では 12 p.u. であるのに対し、線形化した伝達関数では 10 p.u. である。

Fig. 10に、非線形微分方程式の数値解析で得られた $f=2.3 \text{ Hz}$ および 20 Hz における負荷角の時間変動を示す。同図から共振周波数付近ではない 20 Hz では負荷角の変動はごく小さく、Fig. 8 からわかる通り、線形近似が成立している範囲内であることがわかる。一方、共振周波数の 2.3 Hz では、負荷角がおよそ $-40 \sim 70 \text{ deg.}$ の



(a) Overall view.



(b) Enlarged view around the resonance frequency.

Fig. 9 Comparison of frequency characteristics obtained from nonlinear differential equation and linear approximation.

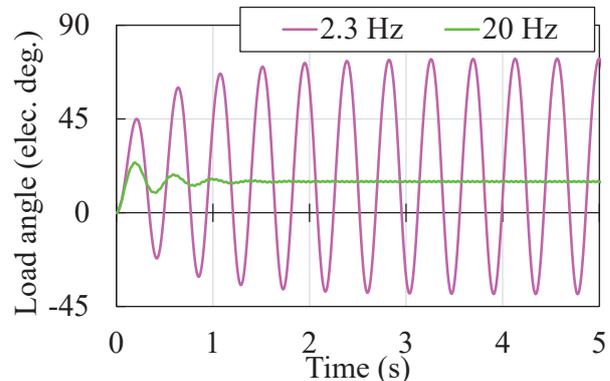


Fig. 10 Time variation of load angle at each frequency.

間で大きく変動しており、線形近似が成り立っている範囲を超えていることがわかる。このような理由により、共振周波数付近において、Fig. 9(b)のような誤差が生じたと考えられる。

5. まとめ

以上本論文では、磁気的非線形ばねを有する2慣性系である磁気ギヤに関して、周波数応答特性に関する解析および定式化を行った。

まず、磁気ギヤにおいてリップルを有するトルク波形を入力したときの応答について、2D-FEMと非線形微分方程式による数値解析の比較を行い、両者が一致することを示した。

次いで、非線形微分方程式を用いて、入力側のリップルの周波数を変化させて、両ロータの周波数特性を解析した。その結果、周波数特性は共振周波数を有し、共振周波数より低周波では入力側より出力側の方がトルクリプルが大きくなる一方で、高周波では出力側のアウトロータのトルクリプルがほぼゼロになることを示した。

最後に、非線形ばねのトルク特性を線形近似することで周波数特性の定式化を行った。その結果、共振周波数付近以外では非線形微分方程式の数値解析の結果と線形近似した際の周波数特性が一致した。また、共振周波数付近の誤差は大きな負荷角変動により、線形近似が成り立たないことが原因であることを示した。

今後は、磁気ギヤの一方のロータをSRモータに接続し、他方のロータを負荷に接続したときの両ロータのトルクリプルの実測を行う予定である。

謝辞 本研究の一部は、JSPS 科研費 24H00302、24KJ0426と東北大学 AIE 卓越大学院プログラムにより助成を受け行った。ここに感謝の意を表する。

References

- 1) P. M. Tlali, R. J. Wang, and S. Gerber: *2014 Int. Conf. Electr. Mach. (ICEM)*, 544 (2014).
- 2) R. Montague, C. Bingham, and K. Atallah: *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, **17**, 269 (2012).
- 3) H. Komiyama and Y. Uchimura: *IEEEJ Trans. Ind. Appl.*, **132**, 389 (2012) (in Japanese).
- 4) M. Desvaux, R. Le Goff Latimier, B. Multon, S. Sire, and H. Ben Ahmed: *2016 Int. Conf. Electr. Mach. (ICEM)*, 1332 (2016).
- 5) K. Iwaki, K. Ito, and K. Nakamura: *IEEE Trans. Magn.*, **59**, 8202005 (2023).
- 6) Y. Mizuana, K. Nakamura, Y. Suzuki, Y. Oishi, Y. Tachiya, and K. Kuritani: *T. Magn. Soc. Jpn. (Special Issues)*, **4**, 52 (2020) (in Japanese).
- 7) S. Gerber and R. J. Wang: *2014 Int. Conf. Electr. Mach. (ICEM)*, 396 (2014).
- 8) J. Wang and K. Atallah: *Int. Electr. Mach. Drives Conf. (IEMDC 2009)*, 870 (2009).

2024年10月4日受理, 2024年11月22日再受理, 2024年12月6日採録